

L. Ibn Khaldoun	DEVOIR DE SYNTHESE 1	2 ^{ème} Sciences 3
RADES		Durée : 2 h
Mr ABIDI Farid	Mathématiques	Décembre 2013

Exercice 1: (4 points)

Répondre par Vrai ou Faux à chacune des questions suivantes. Aucune justification n'est demandée.

1. (\vec{i}, \vec{j}) est une base orthonormée de l'ensemble des vecteurs du plan. On considère les

vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

a) \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si, et seulement si, $x.y' + y.x' = 0$.

b) \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si, et seulement si, $x.x' + y.y' = 0$.

c) $\|\vec{u}\| = x^2 + y^2$.

2. Soit a un réel non nul, b et c deux réels quelconques.

a) Si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une seule solution x_0 alors pour tout $x \neq x_0$, $ax^2 + bx + c$ est du signe de a.

b) Si $b^2 - 4ac < 0$ alors $ax^2 + bx + c$ ne change pas de signe sur \mathbb{R} .

c) Si x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, alors $x_1 + x_2 = \frac{b}{a}$.

3. Soit n un entier supérieur ou égale à 1.

Si P est un polynôme de degré n et si α est un zéro de P alors P est factorisable par $x - \alpha$.

Exercice 2 : (7 points)

1. On pose, pour tout x réel, $f(x) = 3x^2 - 6x - 24$.

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(x) = 0$.

2. Soit g le polynôme défini par $g(x) = 12x^3 + 12x^2 - 21x + 6$.

Calculer $g(-2)$ puis déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x réel,

$g(x) = (x + 2)(ax^2 + bx + c)$.

3. On pose $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$.

a) Donner l'ensemble D de définition de h.

b) Vérifier que, pour tout x de D , $h(x) = \frac{4x^2 - 4x + 1}{x - 4}$.

c) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $h(x) \geq 0$.

Exercice 3: (9 points)

Une unité de longueur étant choisie. Soit A et B deux points distincts du plan tel que $AB = 3$.

Soit O le point tel que $\overrightarrow{AO} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. On désigne par C un point tel que $OC = AB$ et les droites (AB) et (OC) sont perpendiculaires. On note J le milieu du segment $[OC]$.

L'annexe ci-jointe à la page 3/3 est à compléter et à rendre avec la copie.

1. Soit I barycentre des points pondérés $(A, 2)$ et $(B, 1)$.

Ecrire \overrightarrow{AI} en fonction de \overrightarrow{AB} . En déduire que I est le symétrique de O par rapport à A .

2. Montrer que $3\overrightarrow{JO} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$. En déduire que J est le barycentre des points pondérés $(A, 4)$, $(B, -1)$ et $(C, 3)$.

3. Soit K le barycentre de $(I, 2)$ et $(C, 1)$. On considère le repère cartésien $\left(O, \overrightarrow{OA}, \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\right)$.

a) Déterminer les coordonnées des points A , B , C , I et J puis montrer que $K\left(\frac{4}{3}, 1\right)$.

b) Montrer que les points B , J et K sont alignés. En déduire une construction du point K .

4. Soit H l'image de J par la translation de vecteur \overrightarrow{AB} et H' le projeté orthogonal de H sur la droite (AB) .

a) Placer H et H' sur la figure.

b) Soit \mathcal{C} le cercle de centre J et passant par O . Déterminer et représenter $\mathcal{C}' = t_{\overrightarrow{AB}}(\mathcal{C})$.

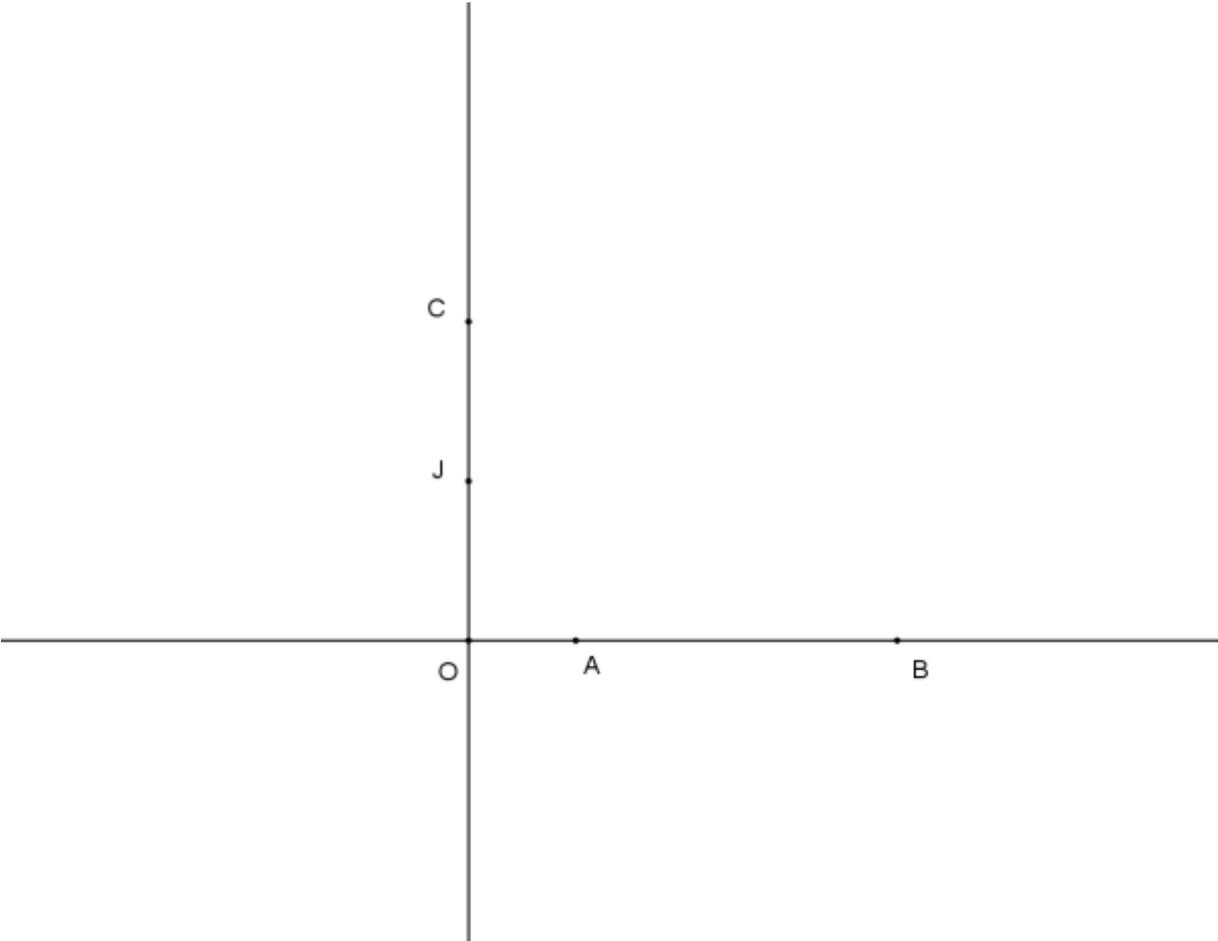
5. Soit M un point variable différent de O sur la droite (OC) . La parallèle à la droite (AB) coupe la droite (HH') en N .

a) Montrer que $t_{\overrightarrow{AB}}(M) = N$.

b) Déterminer et représenter l'ensemble des points N lorsque M varie sur $(OC) \setminus \{O\}$?

Annexe à compléter et à rendre avec la copie

Nom de l'élève :



CORRIGE**Exercice 1:**

1. a) Faux
b) Vrai.
c) Faux.
2. a) Vrai.
b) Vrai.
c) Faux.
3. Vrai.

Exercice 2 : (7 points)

1. On a, pour tout x réel, $f(x) = 3x^2 - 6x - 24$.

L'équation $f(x) = 0$ est équivalente à $3x^2 - 6x - 24 = 0$.

Son discriminant réduit est $\Delta' = (-3)^2 - 3 \times (-24) = 81$. L'équation $f(x) = 0$ admet donc deux racines : $x_1 = \frac{3-9}{3} = -2$ et $x_2 = \frac{3+9}{3} = 4$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est $\{-2, 4\}$.

2. Soit g le polynôme défini par $g(x) = 12x^3 + 12x^2 - 21x + 6$.

$$g(-2) = 12 \cdot (-2)^3 + 12 \cdot (-2)^2 - 21 \cdot (-2) + 6 = -96 + 48 + 42 + 6 = 0.$$

Pour tout x réel, $g(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b+2a)x^2 + (c+2b)x + 2c$.

$$D'où \begin{cases} a = 12 \\ b + 2a = 12 \\ c + 2b = -21 \\ 2c = 6 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a = 12 \\ b = -12 \\ c = 3 \end{cases}.$$

3. On pose $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$.

a) $h(x)$ est défini équivaut à $f(x) \neq 0$ équivaut à $x \neq -2$ et $x \neq 4$.

Donc, l'ensemble de définition de h est $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}$.

b) Pour tout x de D ,

$$h(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{(x+2)(12x^2 - 12x + 3)}{3(x+2)(x-4)} = \frac{3(4x^2 - 4x + 1)}{3(x-4)} = \frac{4x^2 - 4x + 1}{x-4}.$$

c) L'inéquation $h(x) \geq 0$ est équivalente à $\frac{4x^2 - 4x + 1}{x-4} \leq 0$.

Remarquons que : $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$.

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	4	$-\infty$
$4x^2 - 4x + 1$	+	+	0	+	+
$x - 4$	-	-	-	-	+
$h(x)$	-	-	0	-	+

Donc l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{1}{2}\right\} \cup]4, +\infty[$.